第22講　相似の証明

Step　1

1　誠さんは水たまりに映る校舎を見て，三角形の相似を利用して校舎の高さを求めることができないかと考えた。次の〈誠さんが考えた方法〉を読み，①，②に答えなさい。

〈誠さんが考えた方法〉

1　図1のように，水平な地面上で，水たまりに校舎の先端が映って見える位置にまっすぐ立つ。

2　図1での位置関係を，模式図で図2のように表す。ただし，各点はそれぞれ次の位置を示す。

点A　校舎の先端
点B　点Aの位置を通り地面に垂直な直線と地面との交点
点C　誠さんから見た水たまりに映った校舎の先端
点D　点Cの位置を通り地面に垂直な直線上の点
点E　誠さんの目
点F　誠さんが立っている地点

また，3点B，C，Fは同じ直線上にあり，直線AB，DC，EFはいずれも直線BFと垂直である。

3　光の入射角と反射角が等しいことを使って三角形の相似を示し，相似比から校舎の高さABを求める。

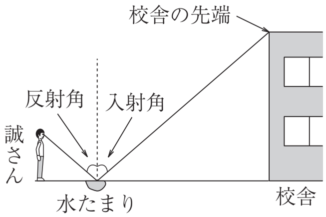


図1

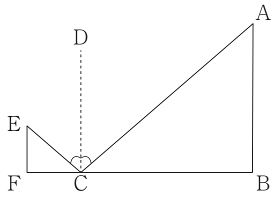


図2

①　図2において△ABCと△EFCが相似であることを，次のように証明した。(ア)～(エ)に適当な数，記号またはことばを書き入れなさい。

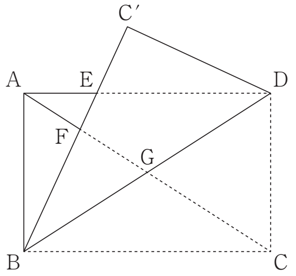
【証明】
△ABCと△EFCにおいて
∠ACB = 90° − ∠(ア)，∠ECF = 90° − ∠(イ)
光の入射角と反射角は等しいので∠(ア) = ∠(イ)
よって，∠ACB = ∠ECF……(1)
また，∠ABC = ∠EFC = (ウ)°……(2)
(1)，(2)から，(エ)がそれぞれ等しいので，△ABC ∽ △EFC

②　EF = 1.5m，FC = 2m，BC = 16mのとき，校舎の高さABを求めなさい。

【岡山県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　図は，AB ＜ AD である長方形 ABCD を，線分 DB を折り目として辺 BC が AD と交わるように折り曲げたものであり，頂点 C が移った点を C′ とする。E は線分 AD と C′B との交点，F，G はそれぞれ線分 AC と C′B，DB との交点である。



このとき，△AFE ∽△BFG となることを次のように証明したい。

［ a ］にあてはまる記号を書きなさい。また，（ Ⅰ ），（ Ⅱ ）にあてはまる最も適当なものを，下のアからキまでの中からそれぞれ選んで，そのかな符号を書きなさい。

（証明）　△ACD と△BDC′ で，

　∠ADC ＝∠BC′D ＝ 90°……①，AC ＝ BD……②，CD ＝ DC′……③

①，②，③から，直角三角形の斜辺と他の 1 辺が，それぞれ等しいので，

　△ACD［ a ］△BDC′……④

次に，△AFE と△BFG で，

④より，（ Ⅰ ）な図形では，対応する角の大きさは等しいので，

　∠EAF ＝∠GBF……⑤

（ Ⅱ ）は等しいので，

　∠AFE ＝∠BFG……⑥

⑤，⑥から，2 組の角が，それぞれ等しいので，

　△AFE ∽△BFG

ア　平行　　イ　垂直　　ウ　合同　　エ　対称　　オ　同位角　　カ　錯角　　キ　対頂角

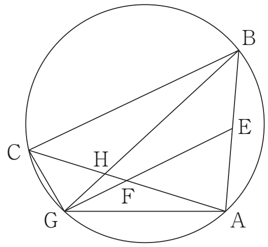
【愛知県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

Step 2

3 右の図のように，3点A，B，Cは円周上にある。△ABCの辺AB，ACの中点をそれぞれE，Fとし，線分EFを点Fの方向に延ばした直線と円との交点をGとする。GとBを直線で結び，辺ACとの交点をHとする。

次の問いに答えなさい。



(1) △GHF ∽△AHGの証明を完成させなさい。ア，エにはあてはまる**記号**を，イ，ウにはあてはまる**言葉**を，オにはあてはまる**条件**を，それぞれ答えなさい。

証明

△GHFと△AHGにおいて

点E，Fはそれぞれ辺AB，ACの中点なので

[ア] ∥ BC

平行線の [イ] は等しいので

∠CBG = ∠BGE……①

また，$\overset{\frown}{GC}$に対する [ウ] は等しいので

∠CBG = ∠CAG……②

①，②より

∠BGE = [エ]

よって

∠HGF = ∠HAG……③

共通な角であるから

∠GHF = ∠AHG……④

③，④より，[オ] から

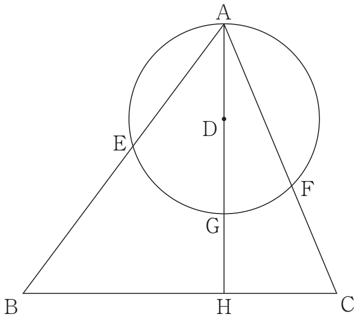
△GHF ∽△AHG

(2) AF = 6 cm，HG = 3 cmのとき，HCの長さを求めなさい。

【富山県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

4　右の図は，△ABCの内部に点Dをとり，点Aを通る円Dをかいたものである。



円Dが，辺AB，ACと交わる点を，それぞれE，Fとし，直線ADが，点A以外に円Dと交わる点，辺BCと交わる点を，それぞれG，Hとする。

次は，AB：AF ＝ AC：AEが成り立つとき，AH ⊥ BCであることを，〈１〉，〈２〉の順に証明したものである。 (ア) ， (イ) 及び □ に，それぞれあてはまる適切なことがらを書きなさい。

〈証明〉

〈１〉 点E，Fをむすび，△AFEをつくる。

△ABCと△AFEにおいて，

仮定から，AB：AF ＝ AC：AE……①

共通しているから，∠BAC ＝ (ア) ……②

①，②より， (イ) ので，△ABC ∽ △AFE……③

〈２〉 点E，Gをむすび，△AEGをつくる。

△AHBと△AEGにおいて，

□

したがって，∠AHB ＝ 90°なので，AH ⊥ BC

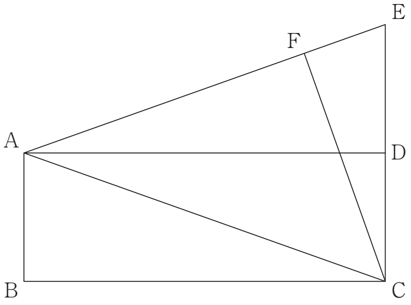
【三重県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

Step　3

5　$AB = 3\,\text{cm}$, 対角線 AC の長さが $9\,\text{cm}$ の長方形 ABCD がある。図のように，辺 CD を延長した直線上に点 E を $AC = AE$ となるようにとる。線分 AE 上に点 F を $AF = 7\,\text{cm}$ となるようにとり，点 C と点 F を結ぶ。

図において，「$\triangle ABC \backsim \triangle EFC$ である」ことを証明せよ。



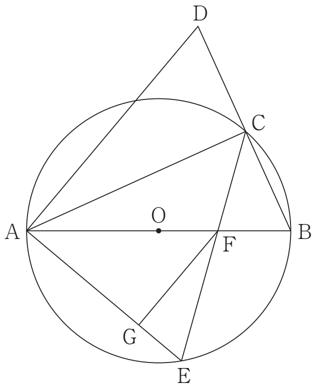
【福岡県】

6　右の図のように，線分 AB を直径とする円 O の周上に，2 点 A，B とは異なる点 C を $AC > BC$ となるようにとり，線分 BC の延長上に点 B とは異なる点 D を $AB = AD$ となるようにとる。

また，点 C をふくまない $\overset{\frown}{AB}$ 上に 2 点 A，B とは異なる点 E をとり，線分 AB と線分 CE との交点を F とする。

さらに，線分 AE 上に点 G を $AE \perp FG$ となるようにとる。

このとき，三角形 ACD と三角形 FGE が相似であることを証明しなさい。



【神奈川県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

〈 ***Note*** 〉

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

第22講　相似の証明

Step 1

1 ①(ア) ACD　(イ) ECD　(ウ) 90　(エ) 2組の角　②（AB ＝）12（m）

≪解説≫

② ①より，△ABC ∽△EFC なので，AB：EF ＝ BC：FC が成り立つ。

よって，AB：1.5 ＝ 16：2 となり，2AB ＝ 24 より，AB ＝ 12（m）

2 a. ≡　Ⅰ．ウ　Ⅱ．キ

Step 2

3 (1) ア．EF　イ．錯角　ウ．円周角　エ．∠CAG　オ．2組の角がそれぞれ等しい

(2) $9-3\sqrt{2}$（cm）

≪解説≫

(2) HF ＝ x cm とすると，AH ＝ 6 ＋ x（cm）　△GHF ∽△AHG より，GH：AH ＝ HF：HG が成り立つので，3：(6 ＋ x) ＝ x：3 より，$x(6+x)=9$ となり，$x^2+6x-9=0$

解の公式より，$x=\dfrac{-6\pm\sqrt{6^2-4\times1\times(-9)}}{2\times1}=\dfrac{-6\pm\sqrt{72}}{2}=\dfrac{-6\pm6\sqrt{2}}{2}=-3\pm3\sqrt{2}$　$x>0$ より，$x=-3+3\sqrt{2}$　また，FC ＝ AF ＝ 6 cm　よって，HC ＝ FC − HF ＝ $6-(-3+3\sqrt{2})=9-3\sqrt{2}$（cm）

4 〈1〉(ア) ∠FAE　(イ) 2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい

〈2〉共通だから，∠BAH ＝∠GAE……④

③より，相似な図形では対応する角は等しいから，∠ABH ＝∠AFE……⑤

$\overset{\frown}{AE}$に対する円周角だから，∠AFE ＝∠AGE……⑥

⑤，⑥より，∠ABH ＝∠AGE……⑦

④，⑦より，2組の角がそれぞれ等しいから，△AHB ∽△AEG

よって，∠AHB ＝∠AEG　AG は直径だから，∠AEG ＝ 90°

Step 3

5 （証明）△ABC と△EFC において，

AB ∥ DC より，錯角が等しいから，∠BAC ＝∠ACD……①

AC ＝ AE より，∠ACD ＝∠FEC……②

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

①，②より，∠BAC ＝∠FEC……③

また，AE ＝ 9 cm，AF ＝ 7 cm より，EF ＝ 9 － 7 ＝ 2 (cm)

△ACE は二等辺三角形より，頂点から底辺にひいた垂線は底辺を二等分するから，

EC ＝ 2CD ＝ 2 × 3 ＝ 6 (cm)

これより，AB：AC ＝ EF：EC ＝ 1：3……④

③，④より，2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから，△ABC ∽△EFC

6 （証明）△ACD と△FGE において，

半円の弧に対する円周角だから，∠ACB ＝ 90°で，

3 点 B，C，D は一直線上にあるから，∠ACD ＝ 90°……①

仮定より，∠FGE ＝ 90°……②

①，②より，∠ACD ＝∠FGE……③

また，△ABD は AB ＝ AD の二等辺三角形だから，∠ADC ＝∠ABC……④

$\overset{\frown}{AC}$に対する円周角だから，∠FEG ＝∠ABC……⑤

④，⑤より，∠ADC ＝∠FEG……⑥

よって，③，⑥より，2 組の角がそれぞれ等しいから，△ACD ∽△FGE

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。